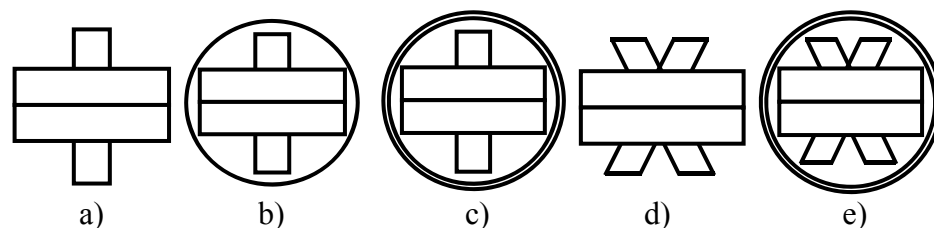


9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

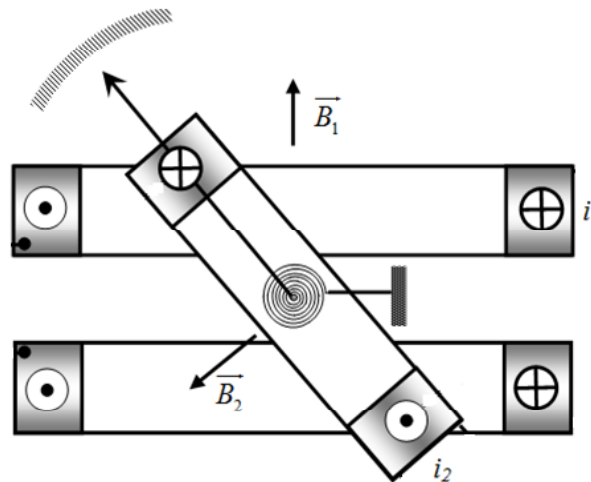
- ❖ Elektrodinamički instrumenti u osnovi se sastoje od dva nezavisna strujna kola koja čine dva kalema.
- ❖ Jedan kalem je nepokretan, a drugi koji je manjih dimenzija je pokretan.
- ❖ Simboli ovog instrumenta dati su na slici.



- ❖ Elektrodinamički instrumenti imaju nekoliko različitih simbola u zavisnosti od konstrukcije.
 - Simbol a) odgovara osnovnoj konstrukciji.
 - Simbol b) je u slučaju kada je instrument oklopljen cilindrom od mekog gvožđa.
 - Ako je nepokretni kalem sa gvozdenim jezgrom simbol je c).
 - Simbol d) je za logometarske instrumente,
 - Simbol e) za logometarske instrumente kod kojih je nepokretni kalem sa gvozdenim jezgrom.

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

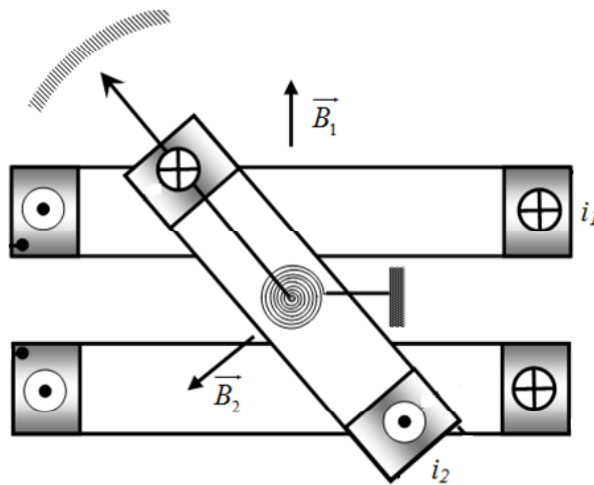
- ❖ Princip rada je isti kao kod magnetoelektričnih instrumenta sa kretnim kalemom, samo što je sada **stalni magnet zamenjen jednim namotajem koji je nepokretan**.
- ❖ **Nepokretni kalem se obično radi iz dva dela** jer se na taj način može dobiti homogeno magnetno polje. Pored toga, delovi kalema se mogu povezati i redno i paralelno i tako promeniti merni opseg.
- ❖ **Nepokretni kalem ima ulogu stalnog magneta.**
- ❖ **Pokretni kalem je u magnetnom polju nepokretnog i interakcijom ta dva polja dolazi do zakretanja pokretnog kalema.**



9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Princip rada elektrodinamičkog instrumenta prikazan je na slici.
 - Sa B_1 je označena indukcija nepokretnih kalemova, a sa B_2 indukcija pokretnog kalema.
 - ❖ Struja kroz nepokretni kalem stvara magnetno polje koje ima efekat sličan stalnom magnetu.
 - ❖ Na pokretni kalem struja se dovodi preko dve spiralne opruge.
- Te opruge ujedno stvaraju otporni momenat.

$$M_o = c \cdot \alpha$$



9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Aktivni momenat se dobija na osnovu promene elektromagnetne energije sistema.
- ❖ Ako se kretni sistem zakrene za ugao $d\alpha$, uloženi rad je:

$$dW_{meh} = M_a \cdot d\alpha$$

- ❖ To se manifestuje kao priraštaj elektromagnetne energije sistema tako da je:

$$dW_{meh} = dW_{emag}$$

- ❖ Sada je aktivni momenat:

$$M_a = \frac{dW_{meh}}{d\alpha} = \frac{dW_{emag}}{d\alpha}$$

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

❖ Ukupna elektromagnetna energija sistema je:

$$W_{emag} = \frac{1}{2} L_1 \cdot i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot i_2^2 + M \cdot i_1 \cdot i_2$$

gde su:

L_1 - induktivnost nepokretnog kalema ($L_1 = \text{const}$),

i_1 - struja nepokretnog kalema,

L_2 - induktivnost pokretnog kalema ($L_2 = \text{const}$),

i_2 - struja pokretnog kalema,

M - međusobna induktivnost ($M \neq \text{const}$, $M = f(\alpha)$)

❖ Jedina veličina koja je funkcija ugla zakretanja je međusobna induktivnost M .

Prema tome aktivni momenat je:

$$M_a = \frac{dW_{emag}}{d\alpha} = i_1 \cdot i_2 \cdot \frac{dM}{d\alpha}$$

❖ Konstruktivno se rešava da bude $\frac{dM}{d\alpha} = \text{const}$. U tom slučaju aktivni momenat je:

$$M_a = k \cdot i_1 \cdot i_2$$

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

❖ Uslov $\frac{dM}{d\alpha} = \text{const}$ ostvaruje se na dva načina:

- konstruktivno, oblikovanjem kalemova, i
- ograničenjem ugla zakretanja na 90° (45° levo i desno, od uzdužne ose nepokretnog kalema).

❖ Pri **merenju jednosmernih struja** aktivni momenat je:

$$M_a = k \cdot I_1 \cdot I_2$$

❖ Pri ravnoteži momenata ima se:

$$M_a = M_o$$

$$k \cdot I_1 \cdot I_2 = c \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{k}{c} \cdot I_1 \cdot I_2$$

❖ Kao što se vidi **skretanje instrumenta je proporcionalno proizvodu struja koje teku kroz nepokretni i pokretni kalem.**

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

❖ Pri **merenju naizmeničnih struja** trenutni aktivni momenat je:

$$m_a(t) = k \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)$$

- ❖ Jasno je da kretni kalem ne može da prati brze promene kretnog momenta zbog inercije.
- ❖ On se postavlja u položaj koji odgovara srednjoj vrednosti aktivnog momenta ($\alpha \sim M_{sr}$).
- Generalno, $i_1(t)$ i $i_2(t)$ mogu biti različitih talasnih oblika i različitih učestanosti.
- Ipak, realno je da one budu istog talasnog oblika i iste učestanosti.

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

❖ Sa stanovišta merenja, realne su dve kombinacije koje zavise od načina povezivanja kalemova.

1) U prvom slučaju kalemovi se vezuju na red.

Kroz njih prolazi ista struja.

Ova kombinacija se koristi za merenje struja i napona.

2) U drugom slučaju kalemovi se napajaju odvojeno,

jedan strujno, a drugi naponski, što omogućava merenje snage.

❖ Analiziraće se svaka od ove dve kombinacije vezivanja kalemova u slučaju napajanja jednosmernim i naizmeničnim naponima i strujama.

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

- ❖ U slučaju vezivanja **kalemova na red** i pri **merenju jednosmernih struja** važi:

$$I_1 = I_2 = I$$

$$M_a = k \cdot I_1 \cdot I_2 = k \cdot I^2$$

$$M_o = c \cdot \alpha$$

$$M_a = M_o$$

$$k \cdot I^2 = c \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{k}{c} \cdot I^2$$

- ❖ Vidi se da je **skretanje instrumenta funkcija kvadrata jednosmerne struje koja teče kroz oba kalema**.
- ❖ Prema tome, skala ovih instrumenata je kvadratna.

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

❖ Kod merenja jednosmernih napona važi:

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{R_v}$$

$$M_a = k \cdot \frac{U^2}{R_v^2}$$

$$M_o = c \cdot \alpha$$

$$M_a = M_o$$

$$k \cdot \frac{U^2}{R_v^2} = c \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{k}{c R_v^2} \cdot U^2$$

❖ Skretanje instrumenta je funkcija kvadrata merenog napona.

❖ Skala je kvadratna.

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

- ❖ U slučaju vezivanja **kalemba na red** i kod napajanja **naizmeničnom strujom** važi:

$$i_1(t) = i_2(t) = i(t)$$

- ❖ Aktivni momenat je funkcija kvadrata struje:

$$m_a(t) = k \cdot i^2(t)$$

- ❖ Pošto kretni sistem zbog inercije ne može da prati promene momenta, on zauzima položaj određen srednjom vrednošću aktivnog momenta:

$$M_{asr} = \frac{1}{T} \int_0^T k \cdot i^2(t) dt = k \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = k \cdot I_{ef}^2$$

- ❖ Srednja vrednost aktivnog momenta je funkcija efektivne vrednosti struje.

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

❖ Za **merenje struje**, pri ravnoteži momenata dobija se:

$$\begin{aligned} M_{asr} &= M_o \\ c \cdot \alpha &= k \cdot I_{ef}^2 \end{aligned} \quad \rightarrow \alpha = \frac{k}{c} \cdot I_{ef}^2$$

❖ Skretanje instrumenta je proporcionalno kvadratu efektivne struje. Skala je kvadratna.

❖ Kod **merenja napona** ima se:

$$i_1(t) = i_2(t) = \frac{u(t)}{R_v} \Rightarrow I_{ef} = \frac{U_{ef}}{R_v}$$

pa se analogno dobija:

$$M_{asr} = \frac{1}{T} \int_0^T k \cdot \frac{u^2(t)}{R_v^2} dt = \frac{k}{R_v^2} \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{k}{R_v^2} \cdot U_{ef}^2$$

❖ Srednja vrednost aktivnog momenta je funkcija kvadrata efektivne vrednosti napona.

❖ Pri ravnoteži momenata ima se:

$$\begin{aligned} M_{asr} &= M_o \\ c \cdot \alpha &= \frac{k}{R_v^2} \cdot U_{ef}^2 \end{aligned} \quad \rightarrow \alpha = \frac{k}{c R_v^2} \cdot U_{ef}^2$$

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

- ❖ U slučaju kada se **kalemovi napajaju odvojeno** ovi instrumenti mogu da se koriste za **merenje snage potrošača**.
- ❖ U slučaju **napajanja jednosmernom strujom**, struja nepokretnog kalema je struja potrošača, odnosno:

$$I_1 = I_p$$

dok je struja pokretnog kalema proporcionalna naponu potrošača:

$$I_2 = \frac{U_p}{R_i}$$

gde su: U_p napon potrošača, a R_i unutrašnji otpor pokretnog kalema.

- ❖ Aktivni momenat je sada:

$$M_a = k \cdot I_1 \cdot I_2 = k \cdot I_p \cdot \frac{U_p}{R_i} = \frac{k}{R_i} \cdot I_p \cdot U_p$$

$$M_a = \frac{k}{R_i} \cdot P$$

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Otporni momenat instrumenta je:

$$M_o = c \cdot \alpha$$

- ❖ Izjednačavanjem momenata dobija se skretanje instrumenta:

$$\alpha = \frac{k}{c \cdot R_i} \cdot P$$

- ❖ Iz poslednjeg izraza jasno se vidi da **instrument meri snagu potrošača**.

- ❖ **Skala instrumenta je linearna.**

- ❖ Ako se **napajanje vrši naizmeničnom strujom**, struja nepokretnog kalema je struja potrošača:

$$i_1(t) = i_p(t)$$

dok je struja kroz pokretni kalem proporcionalna naponu potrošača:

$$i_2(t) = \frac{u_p(t)}{R_i}$$

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Aktivni momenat u ovom slučaju je:

$$m_a(t) = k \cdot i_p(t) \cdot \frac{u_p(t)}{R_i} = \frac{k}{R_i} \cdot p(t)$$

- ❖ Aktivni momenat je funkcija trenutne snage i menja se u vremenu.
- ❖ Kretni sistem ne može da prati brze promene aktivnog momenta zbog inercije i on se postavlja u položaj koji odgovara srednjoj vrednosti aktivnog momenta.
- ❖ Srednja vrednost aktivnog momenta je:

$$M_{asr} = \frac{1}{T} \int_0^T m_a(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{k}{R_i} p(t) dt$$

$$M_{asr} = \frac{k}{R_i} \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{k}{R_i} \cdot P$$

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Otporni momenat instrumenta, kao i u prethodnim slučajevima, dat je relacijom:

$$M_o = c \cdot \alpha$$

- ❖ Izjednačavanjem aktivnog i otpornog momenta dobija se skretanje instrumenta:

$$\alpha = \frac{k}{c \cdot R_i} \cdot P$$

- ❖ Vidi se da je u ovom slučaju **skretanje instrumenta proporcionalno aktivnoj snazi**.

- ❖ Instrument koji je realizovan kao vatmetar može da meri snagu i u jednosmernim i u naizmeničnim kolima.

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Specijalan slučaj, kad su obe struje prostoperiodične (sinusoidalne) funkcije.

$$i_1(t) = I_{1m} \sin \omega t, I_{1m} = \sqrt{2} I_1$$

$$i_2(t) = I_{2m} \sin(\omega t - \psi), I_{2m} = \sqrt{2} I_2$$

- ❖ U prethodnom izrazu ugao ψ je ugao faznog pomeraja između struja.
- ❖ Aktivni momenat je:

$$m_a(t) = k \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)$$

- ❖ Može se odrediti srednja vrednost aktivnog momenta:

$$M_{asr} = \frac{1}{T} \int_0^T m_a(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T k i_1(t) i_2(t) dt$$

$$M_{asr} = \frac{k}{T} I_{1m} I_{2m} \int_0^T \sin \omega t \sin(\omega t - \psi) dt$$

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

❖ Pošto je:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \omega t \sin(\omega t - \psi) = \frac{1}{2} [\cos \psi - \cos(2\omega t - \psi)]$$

dobija se:

$$M_{asr} = \frac{k}{T} I_{1m} I_{2m} \frac{1}{2} \int_0^T [\cos \psi - \cos(2\omega t - \psi)] dt$$

❖ Sada je srednji momenat:

$$M_{asr} = \frac{k}{2T} \sqrt{2} I_1 \sqrt{2} I_2 \cos \psi \cdot t \Big|_0^T = \frac{k}{T} I_1 I_2 \cos \psi \cdot t \Big|_0^T$$

$$M_{asr} = k I_1 I_2 \cos \psi$$

$$\psi = \varphi(I_1, I_2)$$

9.6. ELEKTRODINAMIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Vidi se da je srednja vrednost aktivnog momenta, a samim tim i skretanje instrumenta, proporcionalna proizvodu efektivnih vrednosti struja kroz kalemove i kosinusa ugla faznog pomeraja između njih.
- ❖ Ovo može da se iskoristi da se elektrodinamički instrument realizuje za merenje faktora snage ($\cos\varphi$).
- ❖ Iz dosadašnjih razmatranja, može se reći da elektrodinamički instrumenti mogu da se koriste za merenje:
 - jednosmerne i naizmenične struje i napona,
 - aktivne, a u određenoj konstrukcijskoj izvedbi, i reaktivne snage,
 - u odgovarajućoj izvedbi i faktora snage.

9.6.1 Elektrodinamički ampermetar

❖ Kada se elektrodinamički instrument realizuje kao **ampermetar nepokretni i pokretni kalem se povezuju na red** kao što je prikazano na slici.

❖ Ranije je pokazano da skretanje instrumenta dato relacijom:

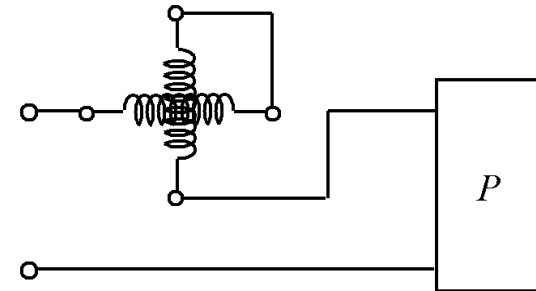
$$\alpha = \frac{k}{c} \cdot I^2$$

gde je I vrednost struje za jednosmernu struju, a efektivna vrednost za naizmeničnu struju.

❖ Ako je zadovoljan uslov da je $dM/d\alpha = \text{const}$,

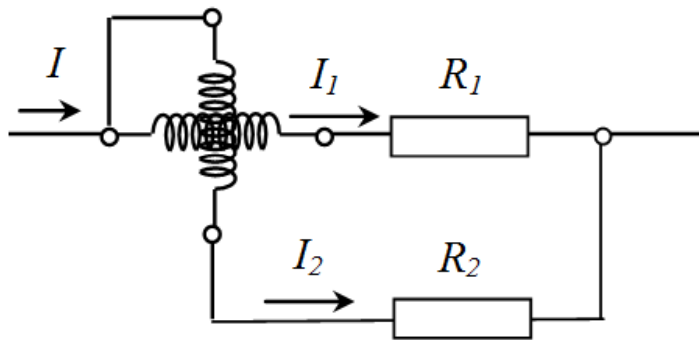
➤ **skala instrumenta je kvadratna.**

Merenje struje



9.6.1 Elektrodinamički ampermetar

- ❖ Veza sa prethodne slike može se primeniti **samo za merenje malih struja**, do reda 0,2 A, zbog toga što struja prolazi kroz spiralne opruge kojim se dovodi na pokretni kalem. Zbog zagrevanja struja kroz njih ne sme biti veća.
- ❖ Za merenje većih struja formira se veza prikazana na sledećoj slici.



- Na red sa svakim kalemom vezan je otpornik.
- Otpori R_1 i R_2 podešavaju se tako da struja kroz pokretni kalem I_2 ne pređe vrednost dozvoljenu spiralnim oprugama.

➤ Tada je:

- pri čemu mora biti:

$$I_1 = a_1 \cdot I$$

$$I_2 = a_2 \cdot I$$

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$I_1 + I_2 = I$$

9.6.1 Elektrodinamički ampermetar

- ❖ Kod merenja jednosmerne struje, skretanje instrumenta je sada:

$$\alpha = k \cdot a_1 \cdot I \cdot a_2 \cdot I = k \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot I^2$$

- ❖ Skretanje instrumenta je proporcionalno kvadratu merene struje.
- ❖ Kod merenja naizmeničnih struja mora se ostvariti i uslov da su **struje u paralelnim granama u fazi**.

To se svodi na uslov da mora biti:

$$\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}$$

odnosno da su **vremenske konstante grana jednake**.

9.6.1 Elektrodinamički ampermetar

- ❖ Osnovne metrološke karakteristike elektrodinamičkih ampermetara su:
 - merenje jednosmernih i naizmeničnih struja od 10 mA do 10 A, maks. 1 kHz,
 - izražen je uticaj stranog magnetnog polja,
 - sopstvena potrošnja ovog instrumenta je relativno velika (nekoliko VA),
 - klase tačnosti su od 0.05 do 0.2.

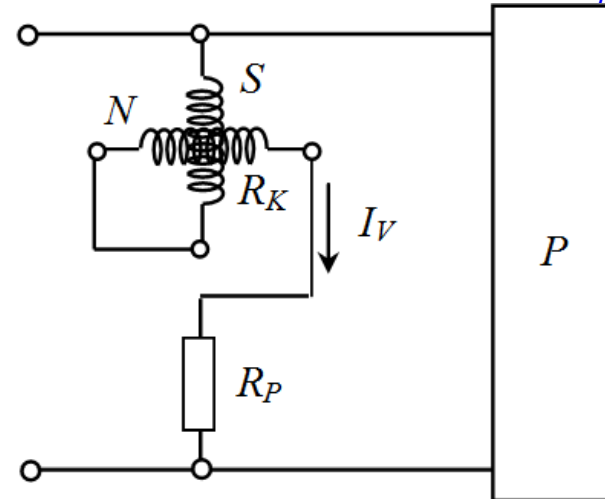
9.6.2 Elektrodinamički voltmetar

❖ Kalemovi se vezuju na red, a na red sa njima dodaje se veliki otpor R_p .

❖ Ukupan otpor je sada:

$$R_v = R_k + R_p$$

gde je R_k ukupan otpor redno vezanih kalemova.



❖ Za jednosmerne struje skretanje voltmetra je:

$$\alpha = \frac{k}{cR_v^2} \cdot U^2$$

a za naizmenične struje:

$$\alpha = \frac{k}{cR_v^2} \cdot U_{ef}^2$$

gde je U_{ef} efektivna vrednost naizmeničnog napona.

9.6.2 Elektrodinamički voltmetar

- ❖ Bez obzira na prirodu struje skala voltmetra je kvadratna.
- ❖ Za niske frekvencije (reda 50 Hz) kolo je zbog velikog R_p pretežno omsko.
- ❖ Za visoke frekvencije dolazi do izražaja induktivnost kalemova (struja nije u fazi sa naponom) i to dovodi do greške u merenjima.
 - Ta pojava se može kompenzovati ako se pored R_p na red doda i kapacitet C .
- ❖ Otpornik R_p , pored ograničenja struja kroz kalemove, vrši i ulogu **kompenzacije uticaja promene temperature na otpor kalemova.**

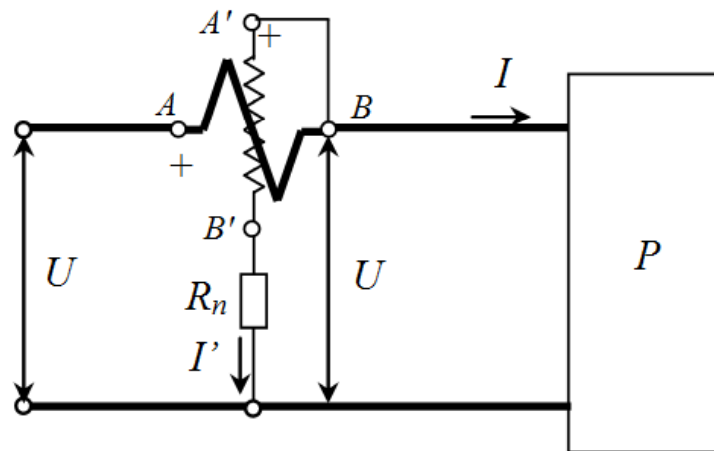
9.6.2 Elektrodinamički voltmetar

❖ Osnovne metrološke karakteristike elektrodinamičkih voltmetara su:

- merenje jednosmernih i naizmeničnih napona od 5 V do 600 V, maks. 1 kHz,
- uticaj stranog magnetnog polja je jako izražen,
- sopstvena potrošnja ovog instrumenta je relativno velika (od 1 VA do 10 VA),
- klase tačnosti su od 0.05 do 0.2.

9.6.3 Elektrodinamički vatmetar

- ❖ Elektrodinamički instrumenti su pogodni za direktno merenje aktivne snage, kao vatmetri.
- ❖ Kod takve primene kalemovi se vezuju kao što je prikazano na slici.



- ❖ Struja kroz nepokretni kalem je struja potrošača.
Ovaj kalem se naziva i **strujni kalem**.
- ❖ Struja kroz pokretni kalem I' je proporcionalna naponu potrošača U .
Ovaj kalem se naziva i **naponski kalem**.
- ❖ Na red sa pokretnim kalemom vezan je veliki otpor da bi struja kroz njega bila što manja.

9.6.3 Elektrodinamički vatmetar

- ❖ Struja kroz naponski kalem je:

$$I' = \frac{U}{R_w}$$

gde su: R_w otpor jednak zbiru otpora pokretnog kalema R_k i dodatnog otpora u naponskom kolu R_n , odnosno $R_w = R_k + R_n$.

- ❖ Važe sva izvođenja od ranije, pa je za jednosmernu struju skretanje instrumenta:

$$\alpha = \frac{k}{c \cdot R_w} P$$

- ❖ Za naizmeničnu struju skretanje instrumenta je takođe:

$$\alpha = \frac{k}{c \cdot R_w} P$$

gde je P aktivna snaga.

9.6.3 Elektrodinamički vatmetar

- ❖ Prethodni izraz može da se napiše i u drugačijoj formi:

$$P = \frac{c \cdot R_w}{k} \alpha = k_w \cdot \alpha$$

gde je k_w konstanta vatmetra.

- ❖ Konstanta vatmetra može da se izračuna preko izraza:

$$k_w = \frac{U_{ops} \cdot I_{ops}}{\alpha_{max}} (\cdot \cos \varphi_n)$$

gde su: U_{ops} - naponski opseg vatmetra,

I_{ops} - strujni opseg vatmetra,

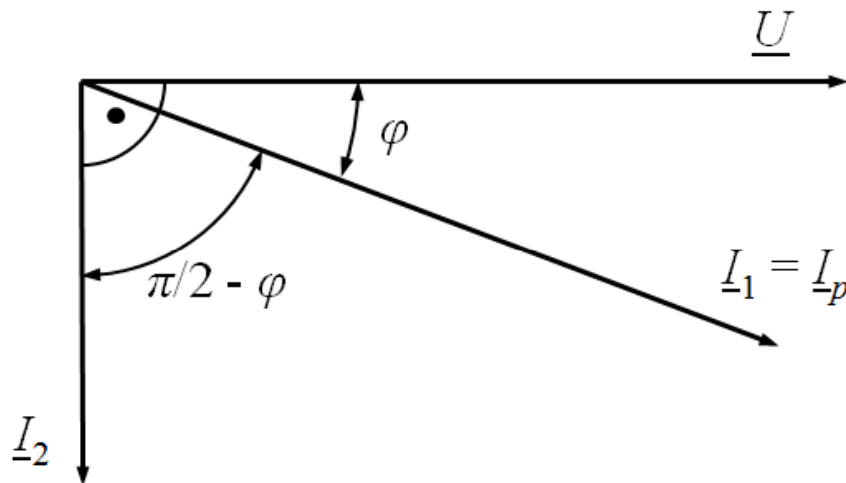
α_{max} - maksimalno skretanje vatmetra,

$\cos \varphi_n$ - faktor snage vatmetra.

- ❖ Faktor snage je podatak koji se daje u specifikaciji instrumenta.
- ❖ Obično je ova vrednost jednaka 1 ako nije drugačije naznačeno.

9.6.4 Elektrodinamički varmetar

- ❖ Elektrodinamički instrumenti se mogu koristiti i za **direktno merenje reaktivne snage**, kao varmetri.
- ❖ Da bi se to postiglo **potrebno je da se obezbedi da struja kroz naponsko kolo instrumenta kasni za naponom potrošača za ugao $\pi/2$** .



$$\sphericalangle(\underline{U}, \underline{I}_2) = \frac{\pi}{2}$$

$$\sphericalangle(\underline{I}_1, \underline{I}_2) = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

9.6.4 Elektrodinamički varmetar

- ❖ Sa vektorskog dijagrama se vidi da je
ugao između vektora struja nepokretnog kalema I_1 i pokretnog kalema I_2
jednak $\pi/2 - \varphi$, pa je sada srednja vrednost aktivnog momenta:

$$M_{asr} = kI_1I_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$M_{asr} = kI_1I_2 \sin \varphi$$

- ❖ Neka je:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_p$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}'}$$

gde su:

I_p - struja potrošača,

U - napon potrošača, a

Z' - impedansa naponskog kola.

9.6.4 Elektrodinamički varmetar

- ❖ Za srednju vrednost aktivnog momenta dobija se:

$$M_{asr} = kI_p \frac{U}{Z'} \sin \varphi$$

- ❖ Pošto je:

$$Q = UI_p \sin \varphi$$

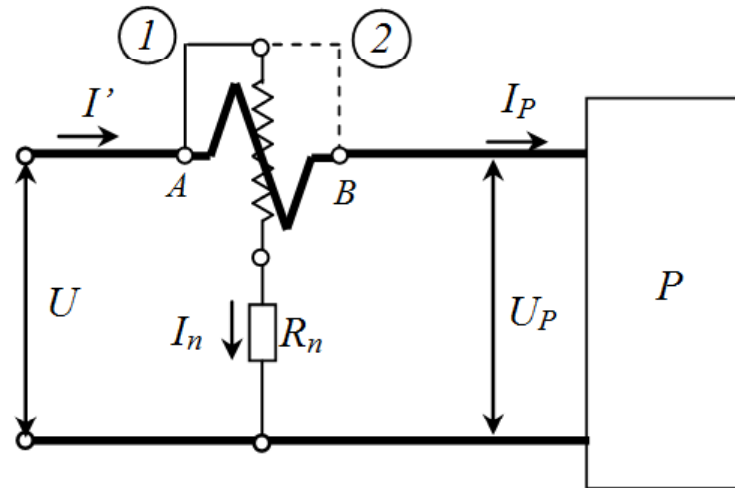
tada je:

$$M_{asr} = \frac{k}{Z'} Q$$

- ❖ Uslov da struja kroz naponsko kolo instrumenta kasni za naponom potrošača za ugao $\pi/2$ zove se „**uslov kvadrature**” i
- ostvaruje se konstruktivno tako što se u naponsko kolo umesto otpornika vezuje dodatna induktivnost.

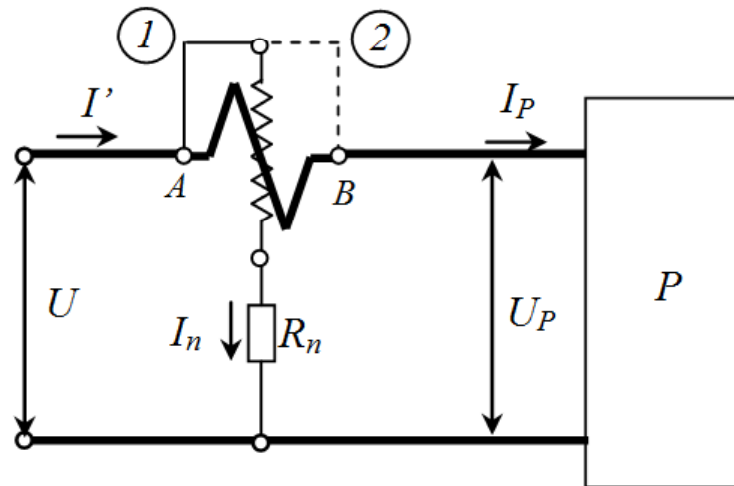
9.6.5. Sistematska greška pri merenju snage vatmetrom

- ❖ Pri merenju snage vatmetrom moguće su dve veze, koje su prikazane na slici.



- ❖ Razlika kod povezivanja je u mestu vezivanja naponskog kola vatmetra.
- ❖ **1-** naponsko kolo se vezuje na ulaz strujnog kola vatmetra (na slici je prikazano punom linijom).
- ❖ **2-** naponsko kolo se vezuje na izlaz strujnog kola vatmetra (na slici je prikazano isprekidanom linijom).

9.6.5. Sistematska greška pri merenju snage vatmetrom



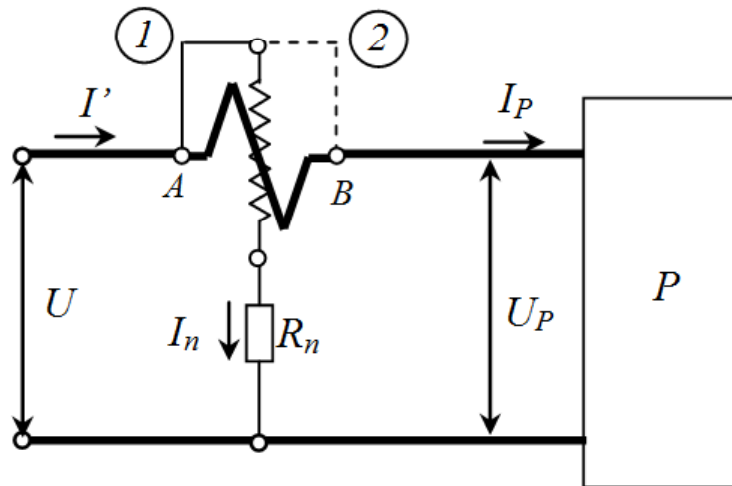
❖ U vezi 1, naponsko kolo meri zbir napona na strujnom klemu i napona na potrošaču, a snaga koju meri vatmetar je:

$$P' = k_w \cdot \alpha \quad P - \text{snaga potrošača,}$$
$$P' = P + P_s \quad P_s - \text{potrošnja strujnog kola.}$$

❖ U vezi 2, strujno kolo meri zbir struje potrošača i struje kroz naponski klem vatmetra. Tada je snaga koju meri vatmetar:

$$P' = k_w \cdot \alpha \quad P - \text{snaga potrošača,}$$
$$P' = P + P_n \quad P_n - \text{potrošnja naponskog kola.}$$

9.6.5. Sistematska greška pri merenju snage vatmetrom



- ❖ U oba slučaja snaga koju pokazuje vatmetar je veća od snage potrošača, što znači da je **sistematska greška uvek pozitivna**.
- ❖ Mogu se koristiti obe veze.
- ❖ U praksi se više koristi veza 2 pošto je **moguće tačnije odrediti potrošnju naponskog kola** jer se otpor naponskog kola može tačnije odrediti. Tada je:

$$P_n = \frac{U^2}{R_n} \rightarrow P = P' - P_n = k_w \cdot \alpha - \frac{U^2}{R_n}$$

- ❖ Strujno kolo ima mali otpor i veliki je uticaj spojnih veza, pa je taj otpor teže odrediti.

9.6.6. Elektrodinamički instrumenti - Zaključak

- ❖ Pomoću ovih instrumenata se meri napon, struja i snaga u kolima jednosmerne i naizmenične struje.

Ampermetri

- mere struje, jednosmerne i efektivne vrednosti naizmeničnih,
- promena mernog opsega - pošto je nepokretni kalem iz dva dela, oni se mogu vezivati na red ili u paralelu,
- rednim povezivanjem dobija se niži opseg, a paralelnim viši opseg.

Voltmetri

- mere napon jednosmerni i efektivnu vrednost naizmeničnog,
- promena mernog opsega - dodavanjem predotpora.

Vatmetri

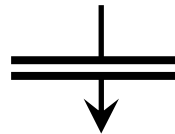
- merenje snage u kolima jednosmerne i naizmenične struje,
- može se menjati naponski opseg (kao kod voltmetra) i strujni opseg (kao kod ampermetra).

9.6.6. Elektrodinamički instrumenti - Zaključak

- ❖ Granična učestanost merenog signala je do reda 10 kHz, ali se koriste uglavnom do 1 kHz.
- ❖ Klase tačnosti - do 0.05 i 0.1 za laboratorijske,
0.2 i 0.5 za prenosne laboratorijske instrumente i
1.0 za industrijske instrumente.
- ❖ Skale - kod ampermetara i voltmetara kvadratne, a
kod vatmetara linearne.
- ❖ Vrednosti indukcije su male, reda 10 mT, pa se javlja jak uticaj stranih polja.
Uticaji se otklanjaju oklopljavanjem instrumenta ili astatičkom konstrukcijom.

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Elektrostatički instrumenti zasnivaju rad na dejstvu sile u električnom polju.
- ❖ Ovi instrumenti se isključivo koriste za merenje napona.
- ❖ Simbol elektrostatičkih instrumenata dat je na slici.



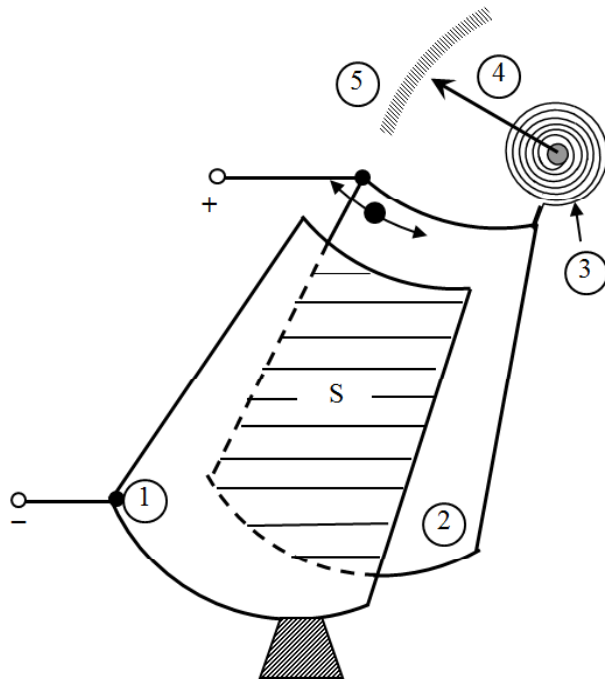
- ❖ Osnovni merni deo ovog instrumenata je kondenzator kod koga je jedna elektroda nepokretna, a druga pokretna i na sebi nosi kazaljku.
- ❖ Pod dejstvom elektrostatičke sile dolazi do zakretanja pokretne elektrode i pomeranja kazaljke.

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

❖ Prema konstrukciji postoje dva osnovna tipa.

1. Tip sa uvlačenjem pokretne ploče

- Pod dejstvom elektrostatičke sile pokretna ploča teži da se u što većoj meri prekrije nepokretnom pločom (da bi kapacitet bio što veći, što veća energija).
- Pokretna ploča je vezana spiralnom oprugom koja stvara otporni momenat, a i napaja se preko nje.



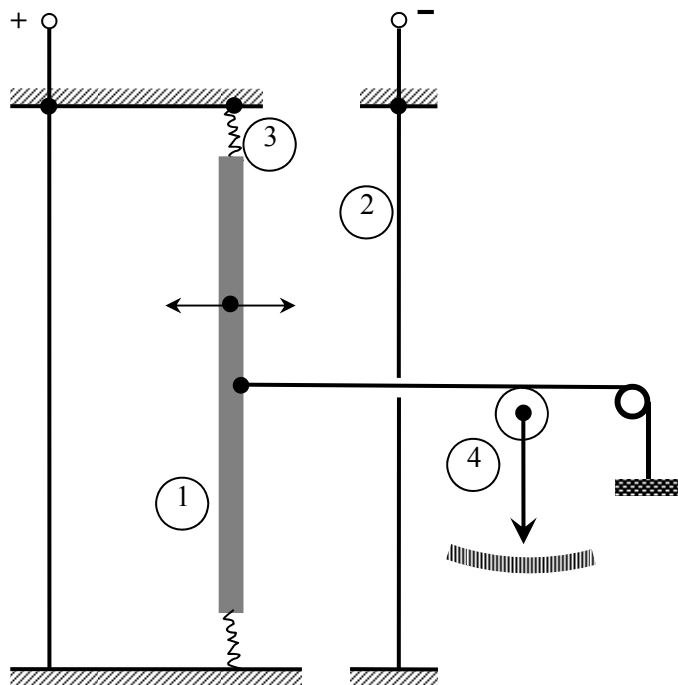
- 1 - nepokretna ploča
- 2 - pokretna ploča
- 3 - spiralna opruga
- 4 - kazaljka
- 5 - skala

❖ Ovaj tip instrumenta koristi se za merenje jednosmernih i naizmeničnih napona do 500 (1000) V.

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

2. Tip kod koga se pod dejstvom elektrostaticke sile menja razmak između ploča

- Instrument radi na principu promene razmaka između elektroda.



- 1 - pokretna elektroda
- 2 - nepokretna elektroda
- 3 - opruge
- 4 - kazaljka

❖ Ovaj tip instrumenta koristi se za merenje vrlo visokih napona i do 600 kV.

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Za oba tipa elektrostatičkog instrumenta biće izvedena zavisnost zakretanja pokretne ploče od napona.
- ❖ Kod **provg tipa**, zakretanjem pokretne ploče za ugao $d\alpha$ pod dejstvom kretnog momenta M_a , ostvaruje se mehanički rad:

$$dW_{meh} = M_a \cdot d\alpha$$

- ❖ Ovaj rad je jednak promeni elektrostatičke energije sistema:

$$dW_{meh} = dW_{el}$$

- ❖ Elektrostatička energija sistema je:

$$W_{el} = \frac{1}{2} u^2(t) \cdot C$$

gde su: $u(t)$ - priključeni napon, a
 C - kapacitet sistema.

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Pošto vrednost priključenog napona ne zavisi od ugla zakretanja, tada je aktivni momenat:

$$M_a = \frac{dW_{meh}}{d\alpha} = \frac{dW_{el}}{d\alpha}$$

$$M_a = \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{2} u^2(t) \cdot C \right]$$

$$M_a = \frac{1}{2} u^2(t) \frac{dC}{d\alpha}$$

- ❖ Konstruktivnim oblikovanjem ploča može se realizovati da bude:

$$\frac{dC}{d\alpha} = const$$

odnosno da se kapacitet sistema menja linearno od ugla zakretanja

$$C = k_c \alpha + C_o$$

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

❖ Prema tome aktivni momenat je sada dat izrazom:

$$M_a = \frac{1}{2} u^2(t) \cdot k$$

❖ Otporni momenat stvara spiralna opruga pa je:

$$M_o = c \cdot \alpha$$

❖ Kod merenja jednosmernih napona ima se:

$$u(t) = U$$

$$M_a = \frac{1}{2} U^2 \cdot k$$

$$M_o = c \cdot \alpha$$

$$M_a = M_o$$

$$\frac{1}{2} k U^2 = c \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{k}{c} U^2 = k' \cdot U^2$$

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Kod merenja **naizmeničnih napona** aktivni momenat je funkcija trenutne vrednosti napona:

$$m_a(t) = \frac{k}{2} u^2(t)$$

- ❖ **Kretni sistem** ne može pratiti trenutne promene zbog inercije i **postavlja se u položaj koji odgovara srednjoj vrednosti momenta**. Tada je:

$$M_{asr} = \frac{1}{T} \int_0^T m_a(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{k}{2} u^2(t) dt$$

$$M_{asr} = \frac{k}{2} \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{k}{2} U_{ef}^2$$

gde je U_{ef} efektivna vrednost merenog napona.

- ❖ Pri ravnoteži momenata dobija se:

$$M_{asr} = M_o$$

$$\frac{1}{2} k U_{ef}^2 = c \cdot \alpha, \text{ odnosno } \alpha = \frac{1}{2} \frac{k}{c} U_{ef}^2$$

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Kod **drugog tipa** instrumenta razmatranja su slična, samo je sada **pomeraj linijski**, a ne kružni kao kod prethodnog tipa. Uloženi rad je:

$$dW_{meh} = F_x dx$$

gde su: F_x elektrostatička sila pod čijim se dejstvom pomera pokretna ploča, a dx pomeraj ploče.

- ❖ Promena elektrostatičke energije sistema je:

$$dW_{el} = \frac{1}{2} u^2(t) dC$$

- ❖ Promena uloženog rada jednaka je promeni elektrostatičke energije, pa je:

$$dW_{meh} = dW_{el}$$

$$F_x dx = \frac{1}{2} u^2(t) dC$$

$$F_x = \frac{1}{2} u^2(t) \frac{dC}{dx}$$

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Kretanju sistema suprotavlja se sila opruge:

$$F_o = c \cdot x$$

- ❖ Pri ravnoteži je:

$$F_x = F_o$$

$$\frac{1}{2}kU^2 = c \cdot x$$

$$x = \frac{k}{2c}U^2 = k'U^2$$

- ❖ Kao što se vidi zavisnost skretanja je opet kvadratna.
- ❖ Proširenje mernog opsega ovih instrumenata vrši se primenom otporničkih i kapacitivnih delila napona.

9.7.1. Proširenje mernog opsega

- ❖ Otporničko delilo koristi se i za jednosmerne i za naizmenične napone. Šema otporničkog delila prikazana je na slici.

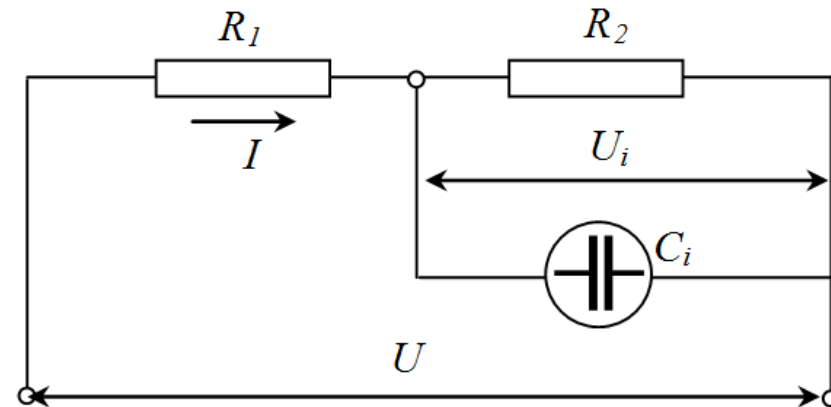
- ❖ Za jednosmernu struju

- odnos merenog napona U i napona na instrumentu U_i je:

$$\frac{U}{U_i} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

- ❖ gde je:

$$R_1 \gg R_2$$



- ❖ Primenom delila mogu se meriti znatno veći naponi.

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

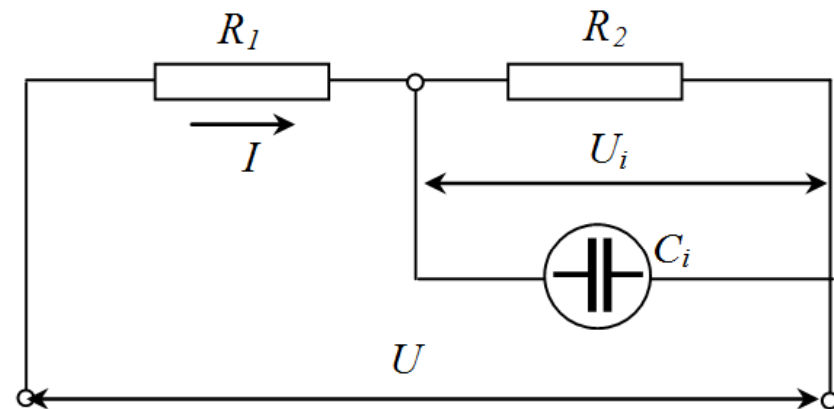
❖ Za naizmeničnu struju važi:

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_i} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_e}{\underline{Z}_e} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_e}$$

❖ Sa slike se vidi da je:

$$\underline{Z}_1 = R_1$$

$$\underline{Z}_e = R_2 \parallel C_i = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_i}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_i}} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_i}$$



❖ Količnik napona je sada:

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_i} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_e} = 1 + \frac{R_1}{\frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_i}}$$

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_i} = 1 + \frac{R_1}{R_2} + j\omega R_1 C_i$$

❖ Pošto se traže moduli, tada je:

$$\frac{U}{U_i} = \sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + (\omega R_1 C_i)^2}$$

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

❖ Pošto je kapacitet instrumenta mali može se smatrati da je:

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 \gg (\omega R_1 C_i)^2$$

❖ Tako da se dobija da je:

$$\frac{U}{U_i} \cong 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

❖ Ovo pogotovo važi za industrijske učestanosti.

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

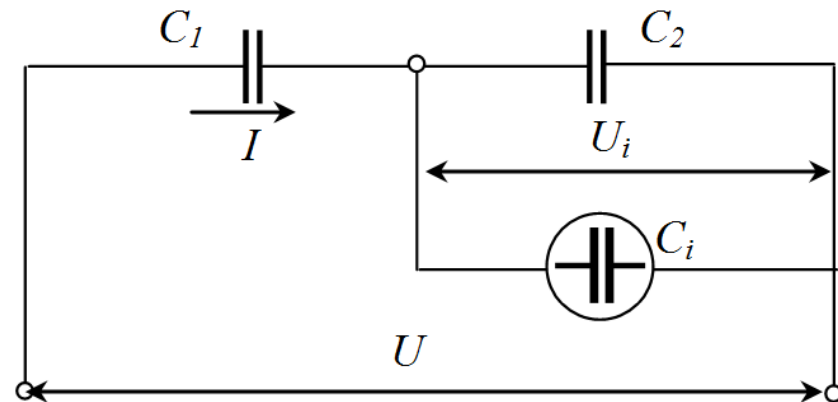
- ❖ Kapacitivno delilo napona koristi se samo za naizmenične napone.
- ❖ Šema kapacitivnog delila data je slici.

- ❖ U ovom slučaju dobija se:

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_i} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_e}{\underline{Z}_e} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_e}$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C_1}$$

$$\underline{Z}_e = C_2 \parallel C_i = \frac{1}{j\omega(C_2 + C_i)}$$



$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_i} = 1 + \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{\frac{1}{j\omega(C_2 + C_i)}} = 1 + \frac{C_2 + C_i}{C_1}$$

➤ odnos napona ne zavisi od frekvencije.

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

❖ U praksi je kapacitet delila mnogo veći od kapaciteta instrumenta, odnosno:

$$C_i \ll C_1, C_2$$

❖ U tom slučaju se dobija:

$$\frac{U}{U_i} = 1 + \frac{C_2}{C_1}$$

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

- ❖ Vidi se da kod **kapacitivnog delila** nema uticaja učestanosti na tačnost delila.
- ❖ Elektrostatički instrumenti mogu meriti napone do vrlo visokih učestanosti.
- ❖ Granična učestanost je određena maksimalnom vrednošću struje koja je dozvoljena za instrument (spiralna opruga).
- ❖ Za dozvoljenu struju I_d , merni opseg U i ako je kapacitet instrumenta C_i dobija se:

$$\underline{I} = j\omega C_i U$$

$$I_{\max} = I_d = \omega_{gr} C_i U \Rightarrow f_{gr} = \frac{I_d}{2\pi C_i U}$$

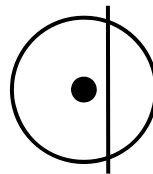
gde C_i odgovara kapacitetu pri punom naponu.

9.7. ELEKTROSTATIČKI INSTRUMENTI

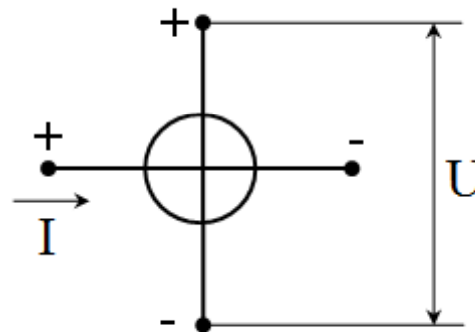
- ❖ Na kraju će biti date neke **opšte metrološke karakteristike elektrostatičkih mernih instrumenata**.
- ❖ **Sopstvena potrošnja** elektrostatičkih instrumenata je **veoma mala**, pa su pogodni za primenu u kolima gde se ne sme opteretiti merno kolo.
- ❖ Kako se **kapacitivnost elektrostatičkih instrumenata** kreće u opsegu od **nekoliko pF do nekoliko desetina pF** oni imaju **relativno malu frekvencijsku zavisnost**, pa se mogu upotrebljavati za merenje naizmeničnog napona frekvencije do 50 MHz.
- ❖ Instrumenti se uglavnom izrađuju kao industrijski instrumenti **klase tačnosti od 1 do 2.5**.
Međutim, u **laboratorijskoj verziji** moguće je postići **klasu tačnosti 0.2**.

9.8. INDUKCIONI INSTRUMENTI

- ❖ Indukcioni instrumenti mogu da se realizuju da mere struju, napon, aktivnu i reaktivnu snagu i energiju.
- ❖ U praksi najčešće se mogu sresti kao brojila električne energije.
- ❖ Ovi instrumenti isključivo se koriste za naizmenične veličine.
- ❖ Simbol ovog instrumenta prikazan je na slici.



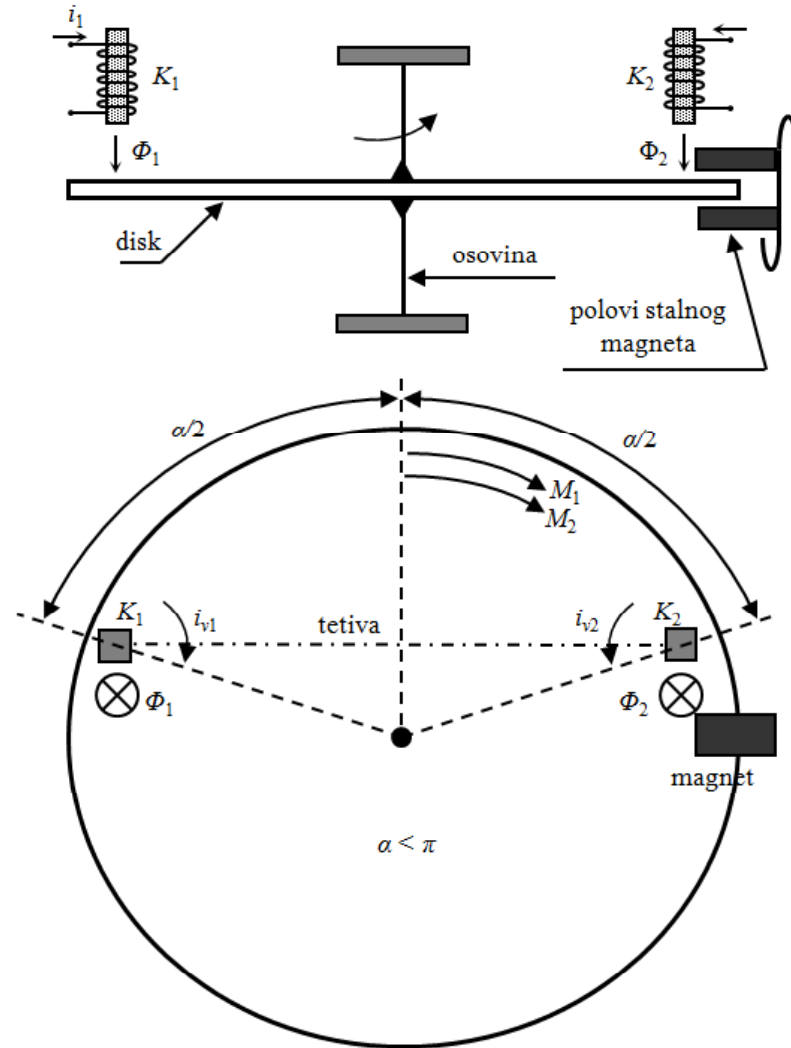
- ❖ Za brojilo oznake krajeva:



9.8. INDUKCIONI INSTRUMENTI

❖ Princip rada indukcionih instrumenata ilustrovan je na slici.

- ❖ Disk sa slike se pravi od provodnog nemagnetnog materijala (najčešće aluminijum).
- ❖ On je postavljen na osovinu da može da se obrće.
- ❖ Elektromagneti sa strujama i_1 i i_2 , postavljeni su ekscentrično, na istoj tetivi.



9.8. INDUKCIONI INSTRUMENTI

- ❖ Struje elektromagneta i_1 i i_2 stvaraju odgovarajuće flukseve. Struja i_1 stvara fluks Φ_1 , a i_2 fluks Φ_2 . Simbolično, to se može prikazati kao:

$$i_1 \rightarrow \Phi_1 \quad i_2 \rightarrow \Phi_2$$

- ❖ Fluksevi u disku indukuju vrtložne struje i_{v1} i i_{v2} , odnosno:

$$\Phi_1 \rightarrow i_{v1} \quad \Phi_2 \rightarrow i_{v2}$$

- ❖ Prema tome, ceo proces može se simbolički opisati kao:

$$i_1 \rightarrow \Phi_1 \rightarrow i_{v1} \quad i_2 \rightarrow \Phi_2 \rightarrow i_{v2}$$

- ❖ Uzajamnim dejstvom fluksa jednog elektromagneta na vrtložne struje koje pravi drugi elektromagnet javlja se kretni momenat, odnosno:

$$\Phi_1 \rightarrow i_{v2} \rightarrow m_1 \quad \Phi_2 \rightarrow i_{v1} \rightarrow m_2$$

- ❖ Kod instrumenata za merenje struje, napona i snage **otporni momenat stvaraju spiralne opruge**, a kod električnog brojila za to je zadužen **stalni magnet**.

9.8. INDUKCIONI INSTRUMENTI

❖ Aktivni momenat se daje u obliku:

$$m(t) = k' \cdot \Phi(t) \cdot i_v(t) = k \cdot i(t) \cdot i_v(t)$$

gde su:

$i(t)$ struja kroz kalem,

$i_v(t)$ indukovana vrtložna struja,

$\Phi(t)$ fluks kalema koji je posledica struje $i(t)$, a

k i k' su konstruktivne konstante.

❖ Postoje dve vrste momenta:

1. Momenat fluksa (struje) kalema Φ_i (i_i) i vrtložne struje koja je posledica dejstva tog fluksa (struje). Taj momenat se može označiti sa m_{ii} .

2. Momenat fluksa (struje) kalema Φ_i (i_i) i vrtložne struje koja je posledica dejstva fluksa drugog kalema. Taj momenat se može označiti sa m_{ij} .

9.8. INDUKCIONI INSTRUMENTI

m_{ii}

- ❖ Prvi tip momenta je pulsirajući sa srednjom vrednošću 0 i ne uzrokuje rotaciju diska. To se može lako pokazati.
- ❖ Neka je struja kroz kalem:

$$i_1(t) = I_{1m} \sin \omega t$$

- ❖ Vrtložna struja indukovana u disku kasni za ugao $\pi/2$, pošto je disk čisto omski otpor. Ta struja može da se opiše relacijom:

$$i_{v1}(t) = I_{v1m} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -I_{v1m} \cos \omega t$$

- ❖ Trenutna vrednost momenta je:

$$m(t) = -k I_{1m} I_{v1m} \sin \omega t \cos \omega t$$

$$m(t) = -k I_{1m} I_{v1m} \frac{\sin 2\omega t}{2}$$

9.8. INDUKCIONI INSTRUMENTI

m_{ii}

❖ Srednja vrednost momenta je:

$$M_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T m(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(-k \cdot I_{1m} \cdot I_{v1m} \frac{\sin 2\omega t}{2} \right) dt = 0$$

- ❖ Srednja vrednost momenta je jednaka 0 pošto je integral periodične funkcije na celoj periodi jednak 0.
- ❖ Može se potvrditi početna premisa da ovaj tip momenta ne uzrokuje rotaciju diska.

9.8. INDUKCIONI INSTRUMENTI

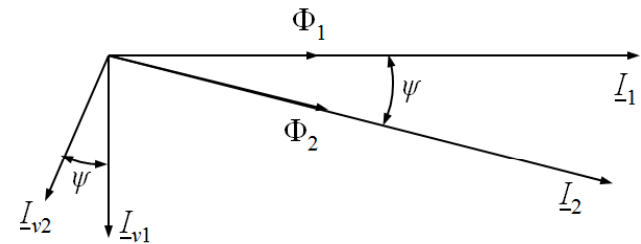
m_{ij}

- ❖ Drugi tip momenta stvara **kretni momenat**, pod uslovom da su struje u kalemovima međusobno fazno pomerene.
- Ako nisu međusobno fazno pomerene (na primer, kalemovi vezani na red), to se svodi na prvi slučaj.
- ❖ Ako su struje fazno pomerene, tada struja prvog kalema:

$$i_1(t) = I_{1m} \sin \omega t$$

indukuje vrtložnu struju:

$$i_{v1}(t) = I_{v1m} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$



- ❖ Struja drugog kalema

$$i_2(t) = I_{2m} \sin(\omega t - \psi)$$

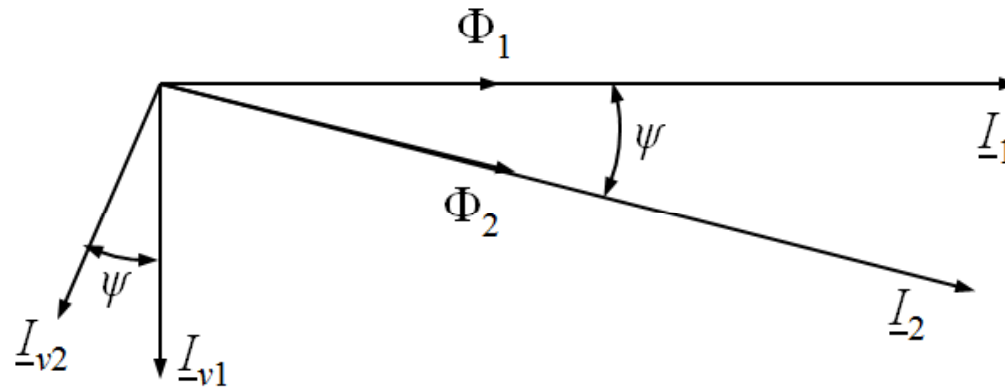
indukuje vrtložnu struju:

$$i_{v2}(t) = I_{v2m} \sin \left(\omega t - \psi - \frac{\pi}{2} \right)$$

gde je ψ fazni pomeraj između struja $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$.

9.8. INDUKCIONI INSTRUMENTI

❖ Vektorski dijagram struja dat je na slici.



m_{ij}

❖ Postoje dve komponente drugog tipa momenta.

- **Prva komponenta** je usled dejstva fluksa prvog kalema na vrtložne struje drugog kalema, $\Phi_1 \rightarrow i_{v2}$. Ta komponenta se može označiti sa **m_{12}** .
- **Druga komponenta** je usled dejstva fluksa drugog kalema na vrtložne struje prvog kalema, $\Phi_2 \rightarrow i_{v1}$. Ta komponenta se može označiti sa **m_{21}** .

9.8. INDUKCIONI INSTRUMENTI

m_{ij}

❖ Trenutna vrednost prve komponente momenta je:

$$m_{12}(t) = k \cdot i_1(t) \cdot i_{v2}(t) = k \cdot I_{1m} \sin \omega t \cdot I_{v2m} \sin \left(\omega t - \psi - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$m_{12}(t) = -k \cdot I_{1m} \cdot I_{v2m} \sin \omega t \cdot \cos(\omega t - \psi)$$

❖ Pošto iz trigonometrije važi formula:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

za trenutnu vrednost momenta se dobija:

$$m_{12}(t) = -k \cdot I_{1m} \cdot I_{v2m} \frac{1}{2} [\sin(2\omega t - \psi) + \sin \psi]$$

9.8. INDUKCIONI INSTRUMENTI

m_{ij}

❖ Srednja vrednost ove komponente momenta je sada:

$$M_{12sr} = \frac{1}{T} \int_0^T m_{12}(t) dt = -\frac{kI_{1m}I_{v2m}}{2} \frac{1}{T} \int_0^T [\sin(2\omega t - \psi) + \sin \psi] dt$$

$$M_{12sr} = \frac{1}{T} \int_0^T m_{12}(t) dt = -\frac{k}{2} I_{1m} I_{v2m} \sin \psi$$

❖ Znak „-” znači da fluks Φ_1 odbija vrtložne struje fluksa Φ_2 .

9.8. INDUKZIONI INSTRUMENTI

m_{ij}

❖ Trenutna vrednost druge komponente momenta je:

$$m_{21}(t) = k \cdot I_{2m} \sin(\omega t - \psi) \cdot I_{v1m} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$m_{21}(t) = -k \cdot I_{2m} \cdot I_{v1m} \sin(\omega t - \psi) \cdot \cos \omega t$$

$$m_{21}(t) = -k \cdot I_{2m} \cdot I_{v1m} \frac{1}{2} [\sin(2\omega t - \psi) + \sin(-\psi)]$$

$$m_{21}(t) = -k \cdot I_{2m} \cdot I_{v1m} \frac{1}{2} [\sin(2\omega t - \psi) - \sin(\psi)]$$

❖ Srednja vrednost ove komponente momenta je:

$$M_{21sr} = \frac{1}{T} \int_0^T m_{21}(t) dt = -\frac{k I_{2m} I_{v1m}}{2} \frac{1}{T} \int_0^T [\sin(2\omega t - \psi) - \sin \psi] dt$$

$$M_{21sr} = \frac{k}{2} I_{2m} I_{v1m} \sin \psi$$

9.8. INDUKCIONI INSTRUMENTI

- ❖ Ova komponenta momenta je pozitivna, a to znači da fluks Φ_2 privlači vrtložne struje fluksa Φ_1 .
- ❖ To znači da se momenti M_{12sr} i M_{21sr} sabiraju, tako da je ukupan momenat:

$$M_a = M_{12sr} + M_{21sr} = \frac{k}{2} [I_{1m} I_{v2m} + I_{2m} I_{v1m}] \sin \psi$$

- ❖ Ako se pretpostavi da je:

$$I_{v2m} = k' \cdot I_{2m} \text{ i } I_{v1m} = k' \cdot I_{1m}$$

- ❖ dobija se:

$$M_a = \frac{kk'}{2} [I_{1m} I_{2m} + I_{2m} I_{1m}] \sin \psi$$

$$M_a = kk' I_{1m} I_{2m} \sin \psi$$

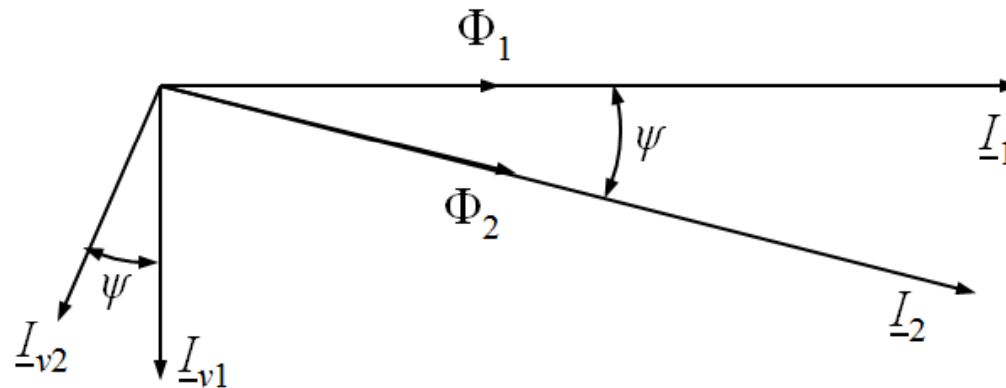
gde je ψ ugao između flukseva $\underline{\Phi}_1$ i $\underline{\Phi}_2$, odnosno fazora struja $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$.

9.8. INDUKCIONI INSTRUMENTI

❖ Generalno, aktivni momenat kod indukcionih instrumenata je:

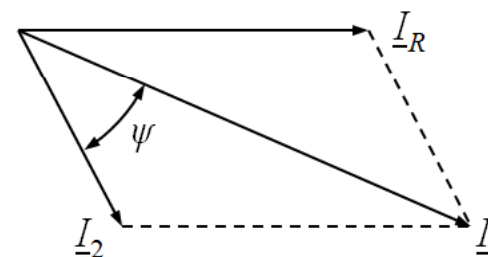
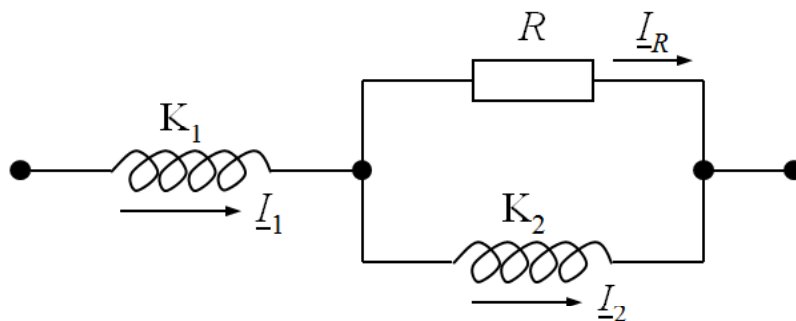
$$M_a = KI_1 I_2 \sin \angle(\underline{I}_1, \underline{I}_2) = K' \Phi_1 \Phi_2 \sin \angle(\underline{\Phi}_1, \underline{\Phi}_2)$$

❖ Iz izraza za momenat vidi se da je ovde situacija drugačija nego kod elektrodinamičkih instrumenata jer je momenat funkcija sinusa ugla, a ne kosinusa.



9.8.1. Indukcioni ampermetar

- ❖ Kada se indukcioni instrument realizuje kao ampermetar kalemovi K_1 i K_2 se vezuju na red, ali tako da se ostvari fazni pomeraj između struja.
- ❖ Šema vezivanja prikazana je na slici levo, dok je fazorski dijagram prikazan na slici desno.



9.8.1. Indukcioni ampermetar

- ❖ Na osnovu šeme može se reći da između struja kalemova $K1$ i $K2$ postoji veza:

$$I_2 = k_1 I_1$$

- ❖ Aktivni momenat je tada:

$$M_a = k I_1 I_2 \sin \psi = k I_1 k_1 I_1 \sin \psi$$

$$M_a = k_2 I_1^2$$

- ❖ Otporni momenat stvaraju spiralne opruge pa je:

$$M_o = c \cdot \alpha$$

- ❖ Pri ravnoteži momenata važi

$$M_a = M_o$$

$$k_2 I_1^2 = c \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{k_2}{c} I_1^2$$

9.8.2. Indukcioni voltmetar

- ❖ U realizaciji voltmetra celom sistemu se na red vezuje veliki otpor R_v .
- ❖ Tada je struja kroz sistem:

$$i = \frac{u}{R_v}$$

- sva razmatranja za ampermetar važe i u slučaju voltmetra. Dobija se da je:

$$\alpha = kU^2$$

9.8.3. Indukcioni vatmetar i varmetar

- ❖ U slučaju kada se indukcioni instrument realizuje kao **vatmetar i varmetar** kroz jedan kalem protiče struja potrošača, a kroz drugi kalem protiče struja proporcionalna naponu potrošača, odnosno:

$$I_1 \sim I_p \quad I_2 \sim U_p$$

- ❖ U tom slučaju ugao između fazora struja I_1 i I_2 je jednak uglu između fazora struje potrošača I_p i napona potrošača U_p , odnosno:

$$\angle(\underline{I}_1, \underline{I}_2) = \angle(\underline{U}_p, \underline{I}_p) = \varphi$$

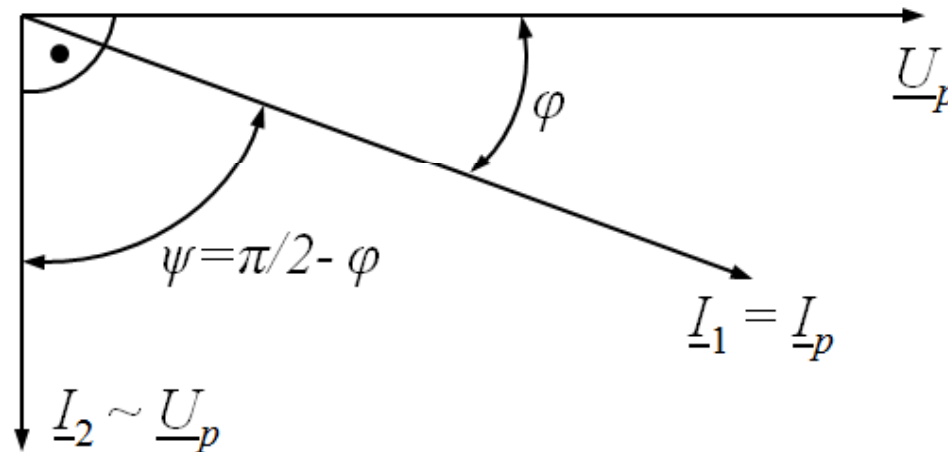
- ❖ Pri tome, **struja u naponskom kolu mora biti u fazi sa naponom**, a zbog induktivnosti kalema to se obezbeđuje dodatnim elementima.
- ❖ Tada je aktivni momenat:

$$M_a = k U_p I_p \sin \varphi = k \cdot Q$$

- ❖ To znači da se osnovnom konstrukcijom dobija **varmetar**.

9.8.3. Indukcioni vatmetar i varmetar

- ❖ Da bi se instrument realizovao kao **vatmetar** mora se obezbediti **uslov kvadrature** tj. da struja u naponskom kolu bude pomerena za $\pi/2$ u odnosu na napon.
- ❖ To se postiže konstruktivno. Postoji niz veza kojima se to realizuje.
- ❖ Fazorski dijagram izgleda kao na slici.



9.8.3. Indukcioni vatmetar i varmetar

❖ Sada važi da je:

$$\angle(\underline{I}_1, \underline{I}_2) = \psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

➤ pa se za aktivni momenat dobija:

$$M_a = kUI \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$M_a = kUI \cos \varphi = k \cdot P$$

❖ Kao što se vidi, obezbeđenjem **uslova kvadrature** indukcionim instrumentom može da meri i aktivnu snagu, odnosno da radi kao **vatmetar**.

9.8.4. Indukciono brojilo električne energije

- ❖ U praksi, indukcioni instrumenti se najčešće realizuju kao **brojila električne energije**.
- ❖ Brojila su razvijena iz vatmetara i varmetara.
- ❖ Ona nemaju spiralne opruge jer mora da se omogući rotacija diska.
- ❖ Pri merenju ubacuje se komponenta vremena.
- ❖ Preko sistema zupčanika registruje se broj obrtaja diska.

9.8.4. Indukciono brojilo električne energije

- ❖ Pri konstrukciji brojila teži se da aktivni momenat bude linearna funkcija aktivne snage, odnosno:

$$M_a = c_1 \cdot P$$

- ❖ Takođe, teži se da otporni momenat bude linearna funkcija ugaone brzine obrtanja ω :

$$M_o = c_2 \cdot \omega$$

- ❖ Kada su momenti izjednačeni važi:

$$M_a = M_o$$

- ❖ Dalje važi važi:

$$c_1 \cdot P = c_2 \cdot \omega = c_2 \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

gde je α ugao zakretanja diska.

9.8.4. Indukciono brojilo električne energije

- ❖ Integracijom prethodne jednačine po vremenu od 0 do nekog vremena t dobija se:

$$\int_0^t c_1 P dt = \int_0^t c_2 \frac{d\alpha}{dt} dt$$

$$c_1 \int_0^t P dt = c_2 \int_0^t d\alpha$$

$$c_1 W = c_2 \alpha = c_2 2\pi N$$

$$W = \frac{c_2}{c_1} 2\pi N = k_b N$$

gde su: W - utrošena energija,

N - broj obrtaja registrovan za vreme t , a

k_b - konstanta brojila.

9.8.4. Indukciono brojilo električne energije

- ❖ Konstanta brojila k_b pokazuje kolika je utrošena energija po jednom obrtaju diska.
- ❖ Ona se obično daje u jedinicama Ws/ob ili kWh/ob.
- ❖ Određuje se uvek iz podatka koji je dat na brojilu u obliku:

$$X[\text{obrtaja}] = 1 \text{ kWh}$$

- ❖ Ovo znači da disk treba da obrne X puta da bi se registrovala energija od 1 kWh. Iz tog podatka konstanta brojila se dobija na sledeći način:

$$k_b = \frac{3.6 \cdot 10^6}{X} \left[\frac{\text{Ws}}{\text{ob}} \right] \text{ ili } k_b = \frac{1}{X} \left[\frac{\text{kWh}}{\text{ob}} \right]$$

- ❖ Postoje dva osnovna problema koje treba rešiti pri realizaciji indukcionog brojila.
- ❖ **Prvi problem** je kako obezbediti linearnu zavisnost aktivnog momenta od merene snage, a **drugi** kako obezbediti linearnu zavisnost otpornog momenta od brzine obrtanja.

9.8.4. Indukciono brojilo električne energije

- ❖ Prvi problem se relativno lako rešava jer je ranije pokazano kod indukcionog vatmetra da je skretanje proporcionalno merenoj aktivnoj snazi, pri čemu se samo mora realizovati uslov kvadrature.
- ❖ Drugi problem je složeniji. Za vreme rotacije diska **postoji više kočionih momenata. Osnovnu komponentu diktira dejstvo stalnog magneta.**
- ❖ Za vreme rotacije i stalni magnet stvara vrtložne struje, koje su proporcionalne njegovom fluksu i brzini obrtanja.
- ❖ Pri tome se javljaju dejstva:
 - flukseva strujnog i naponskog kalema na vrtložne struje stalnog magneta,
 - fluksa stalnog magneta na vrtložne struje strujnog i naponskog kalema,
 - fluksa stalnog magneta na njegove vrtložne struje.

9.8.4. Indukciono brojilo električne energije

❖ Generalno gledano, **postoje tri komponente otpornog momenta**:

– usled stalnog magneta $M_1 = \omega k_1 \Phi_m^2$

– usled strujnog kalema $M_2 = \omega k_2 \Phi_i^2$

– usled naponskog kalema $M_3 = \omega k_3 \Phi_u^2$

❖ Zbog rotacije diska javlja se otporni momenat usled trenja u ležištima M_σ .

❖ Ukupan otporni momenat sada je: $M_o = \omega \cdot (k_1 \Phi_m^2 + k_2 \Phi_i^2 + k_3 \Phi_u^2) + M_\sigma$

❖ U brojilu se formira dodatni aktivni momenat M_Δ , koji treba da poništi otporni momenat koji je posledica trenja, odnosno treba da važi:

$$M_\Delta \cong M_\sigma$$

❖ Taj momenat se formira tako što se deo fluksa strujnog ili naponskog kalema „*defazira*”, odnosno deo površine gvođenog jezgra kalema se prekrije provodnom pločicom ili se deo obuhvati jednim kratkospojnim namotajem.

9.8.4. Indukciono brojilo električne energije

- ❖ Konstruktivno se podešava da fluksevi kalemova budu mnogo manji od fluksa stalnog magneta, odnosno da važi:

$$\Phi_m \gg \Phi_i, \Phi_u$$

- ❖ Tada je otporni momenat:

$$M_o \cong \omega k_1 \Phi_m^2 + M_\sigma$$

- ❖ Ukupan aktivni momenat je:

$$M_{au} = k'P + M_\Delta$$

- ❖ Pri ravnoteži momenata dobija se:

$$M_{au} = M_o$$

$$k'P + M_\Delta = \omega k_1 \Phi_m^2 + M_\sigma$$

$$k'P = \omega k_1 \Phi_m^2 = k_1 \Phi_m^2 \frac{d\alpha}{dt}$$

9.8.4. Indukciono brojilo električne energije

- ❖ Integracijom poslednje jednačine po vremenu od trenutka 0 do trenutka t dobija se:

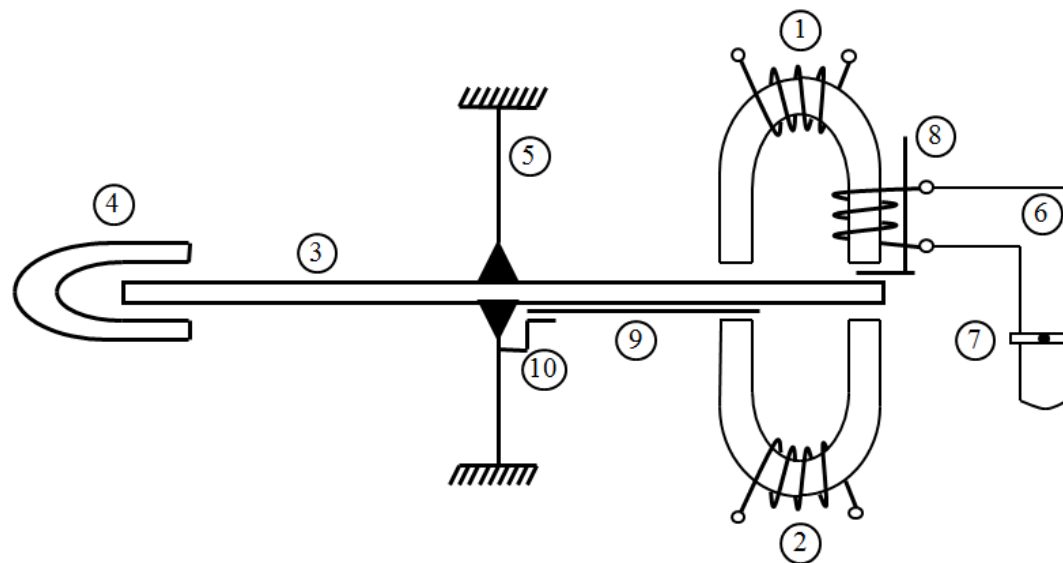
$$k' \int_0^t P dt = k_1 \Phi_m^2 \int_0^t d\alpha$$

$$W = \frac{k_1}{k'} \Phi_m^2 \alpha = \frac{k_1}{k'} \Phi_m^2 2\pi N = k_b N$$

- ❖ Izmerena utrošena energija srazmerna je broju obrtaja diska.

9.8.4.1. Podešavanje indukcionog brojila

- ❖ Podešavanje brojila sastoji se od nekoliko aktivnosti koje imaju za cilj da brojilo radi pravilno i tačno.
- Na slici je data skica brojila sa svim delovima od značaja pomoću koje će se objasniti podešavanje brojila.



1 – strujni kalem,
2 – naponski kalem
3 – disk,
4 – magnet,
5 – osovina,

6 – kolo za podešavanje uslova kvadrature,
7 – konjic,
8 – osovina i pločica za kompenzaciju trenja,
9 i 10 – jezičak i kukica za sprečavanje okretanja
usled dejstva naponskog kalema.

9.8.4.1. Podešavanje indukcionog brojila

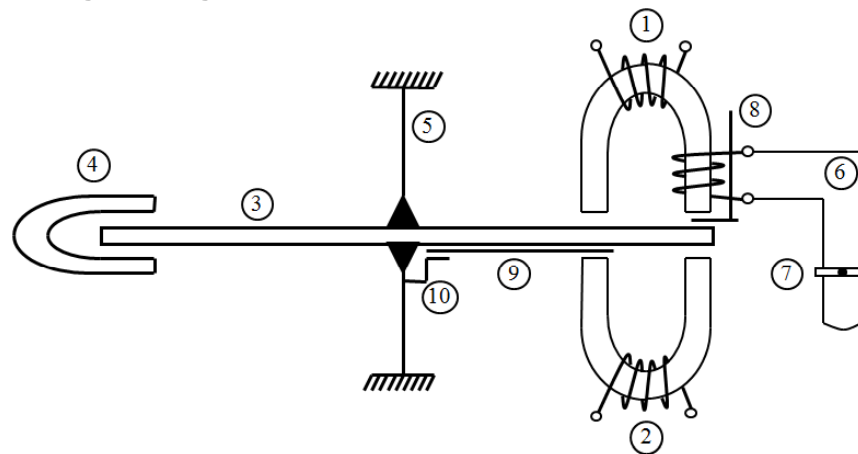
❖ Uslov kvadrature, odnosno uslov da bude

$$\psi + \varphi = 90^\circ$$

podešava se mostićem, kratkospojnikom (oznaka 7 sa slike).

❖ Time se menja otpor dodatnog namotaja na strujnom kalemu.

❖ Taj kalem je od otporne žice i pomoću njega se menjaju parametri strujnog kalema i podešava ugao $\psi + \varphi$.

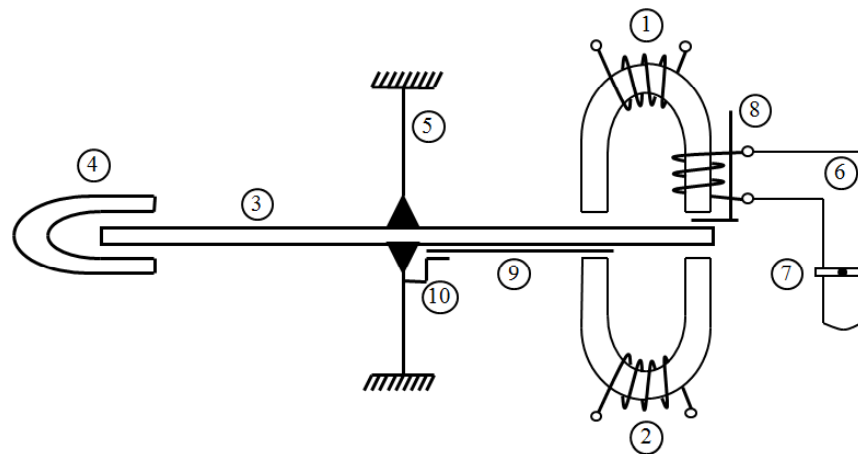


1 – strujni kalem,
2 – naponski kalem
3 – disk,
4 – magnet,
5 – osovina,

6 – kolo za podešavanje uslova kvadrature,
7 – konjic,
8 – osovina i pločica za kompenzaciju trenja,
9 i 10 – jezičak i kukica za sprečavanje okretanja
usled dejstva naponskog kalema.

9.8.4.1. Podešavanje indukcionog brojila

- ❖ Kompenzacija otpornog momenta usled trenja vrši se pomoću osovine i pločice na njenom kraju (oznaka 8 sa slike).
- ❖ Ta pločica prekriva deo jezgra strujnog kalema i time menja njegov ukupni fluks. Tako se stvara dopunski momenat M_{Δ} .

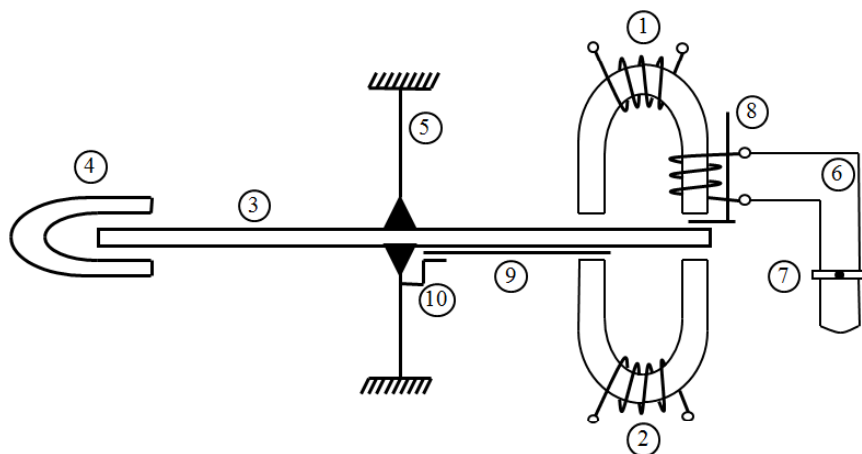


1 – strujni kalem,
2 – naponski kalem
3 – disk,
4 – magnet,
5 – osovina,

6 – kolo za podešavanje uslova kvadrature,
7 – konjic,
8 – osovina i pločica za kompenzaciju trenja,
9 i 10 – jezičak i kukica za sprečavanje okretanja
usled dejstva naponskog kalema.

9.8.4.1. Podešavanje indukcionog brojila

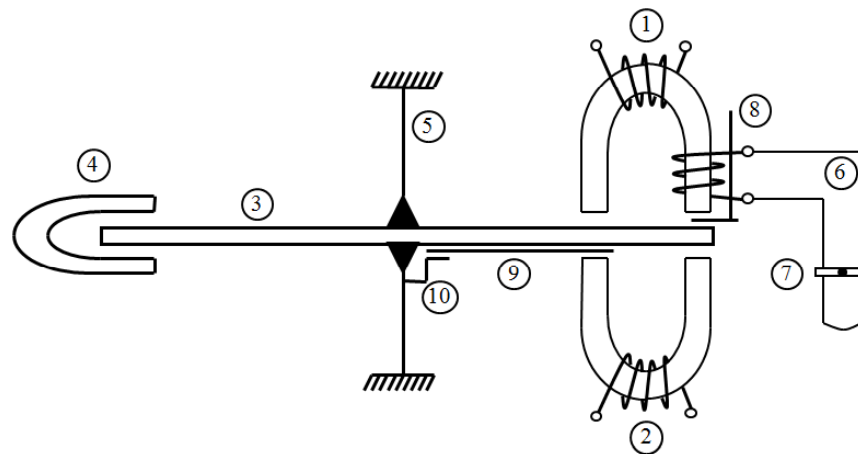
- ❖ Kod podešavanja brojila potrebno je **sprečiti obrtanje u praznom hodu.**
- ❖ U slučaju kada je struja jednaka nuli disk ne sme da se kreće.
- ❖ To se radi pomoću male metalne pločice postavljene na osovini diska i komadom lima koji delimično prekriva jezgro naponskog kalema (oznake 9 i 10 sa slike).
- ❖ Pošto je naponski kalem stalno uključen (brojilo je uvek pod naponom), njegov fluks stalno postoji, pa je komad lima stalno namagnetisan i privlači metalnu pločicu učvršćenu na osovini i tako se disk zaustavlja.



- 1 – strujni kalem,
- 2 – naponski kalem
- 3 – disk,
- 4 – magnet,
- 5 – osovina,
- 6 – kolo za podešavanje uslova kvadrature,
- 7 – konjic,
- 8 – osovina i pločica za kompenzaciju trenja,
- 9 i 10 – jezičak i kukica za sprečavanje okretanja
usled dejstva naponskog kalema.

9.8.4.1. Podešavanje indukcionog brojila

- ❖ Regulacija broja obrtaja vrši se pomeranjem ili obrtanjem stalnog magneta.
- ❖ Tako se menja površina diska koju prekriva magnet. Na taj način se utiče na otporni momenat i broj obrtaja u jedinici vremena.

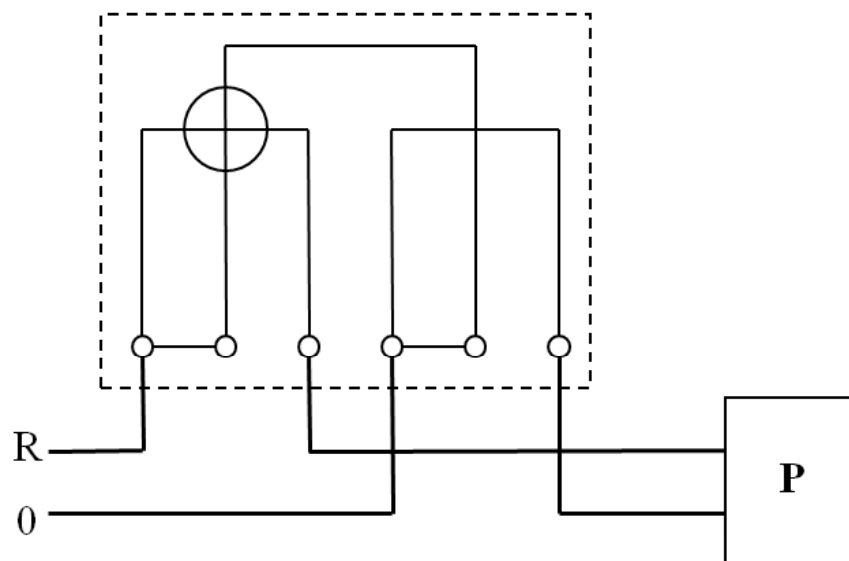


1 – strujni kalem,
2 – naponski kalem
3 – disk,
4 – magnet,
5 – osovina,

6 – kolo za podešavanje uslova kvadrature,
7 – konjic,
8 – osovina i pločica za kompenzaciju trenja,
9 i 10 – jezičak i kukica za sprečavanje okretanja
usled dejstva naponskog kalema.

9.8.4.2. Šeme indukcionih brojila

- ❖ Brojila se, prema tipu potrošača čija se energija meri, mogu podeliti na monofazna i trofazna brojila.
- ❖ **Monofazna brojila** mere aktivnu energiju monofaznih potrošača.
- ❖ Proizvode se za napon 220 V i više vrednosti struja.
- ❖ Šema priključivanja monofaznog brojila prikazana je na slici.
- ❖ Potrebno je reći da se monofazna brojila za reaktivnu energiju ne proizvode.



9.8.4.2. Šeme indukcionih brojila

❖ **Trofazna brojila** se koriste u trofaznim sistemima za merenje aktivne i reaktivne energije trofaznih potrošača. Mogu biti:

- dvosistemska, $3 \times 380\text{V}$, $3 \times 400\text{V}$
- trosistemska, $3 \times 380/220\text{ V}$, $3 \times 400/231\text{V}$
- dvotarifna,
- sa pokazivačem maksimuma.

❖ Da li će se koristiti dvosistemska ili trosistemska brojila zavisi od načina napajanja potrošača.

- Ako je **trožični sistem napajanja** (tri fazna bez neutralnog provodnika) onda se koriste **dvosistemska brojila**.
- U slučaju **čtetvorožičnog sistema napajanja** (tri fazna i neutralni provodnik) koriste se **trosistemska brojila**.

9.8.4.2. Šeme indukcionih brojila

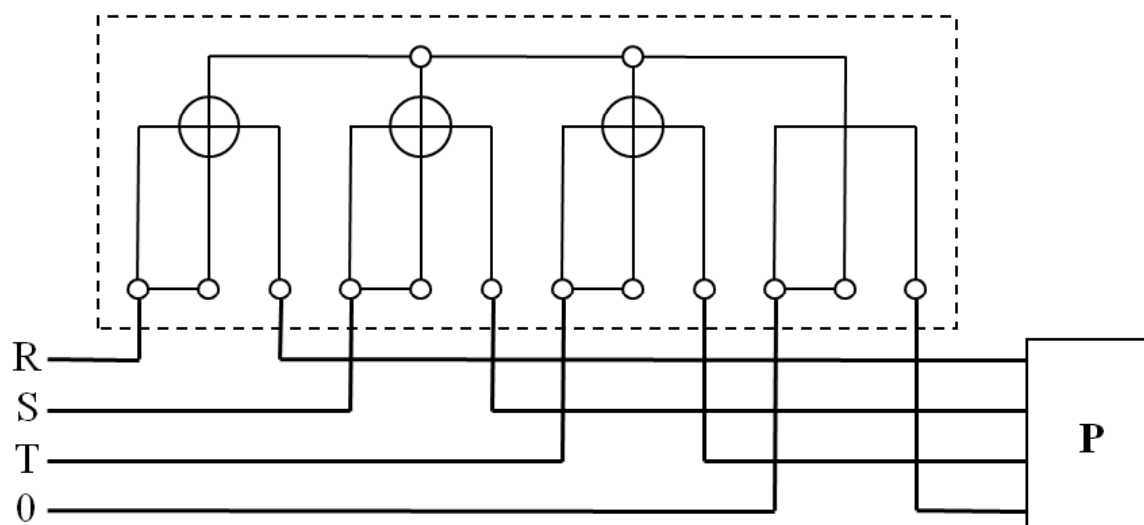
- ❖ Brojila se uglavnom izrađuju u **dvotarifnoj varijanti**, ali to nije pravilo.
- Od običnih se razlikuju jedino po tome što imaju **dva brojčanika za dve različite tarife**.
- Uključivanje pojedinih brojčanika vrši se pomoću **elektromagnetnog preklopnika**.

- ❖ Brojila sa **pokazivačem maksimuma** u intervalu između dva očitavanja pokazuju najveće opterećenje u kW.
- Ova brojila služe da se stekne uvid u to kako potrošač opterećuje električnu mrežu u pogledu snage.

- ❖ **Klase tačnosti brojila** zavise od namene, odnosno mesta ugradnje.
- ❖ Za domaćinstva klasa tačnosti brojila je **2**, a za brojila koja se povezuju na kupoprodajnim mestima klasa tačnosti je **0.2**.

9.8.4.2. Šeme indukcionih brojila

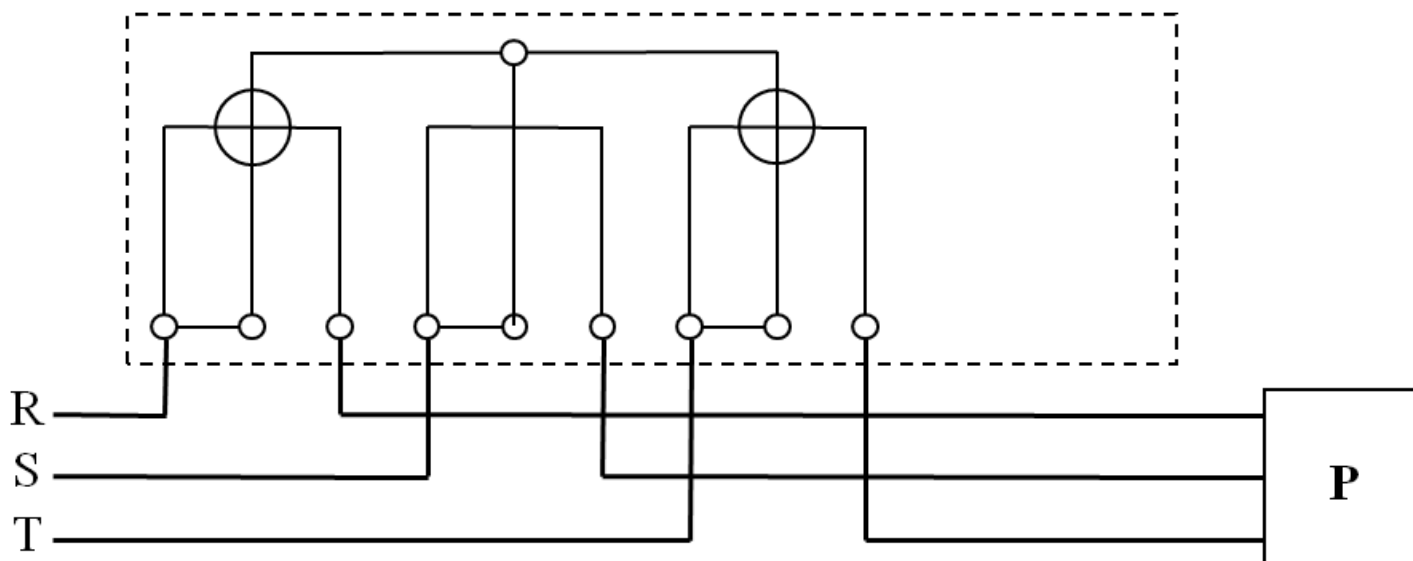
- ❖ Na slici je data šema **trofaznog trosistemskog brojila za merenje aktivne energije u četvorožičnom sistemu.**



- ❖ Ova brojila se mogu primeniti i u trožičnom sistemu ali u tom slučaju brojilo je bez sistema za neutralni provodnik.
- ❖ Praktično gledano, ova šema odgovara merenju aktivne snage pomoću tri vatmetra.

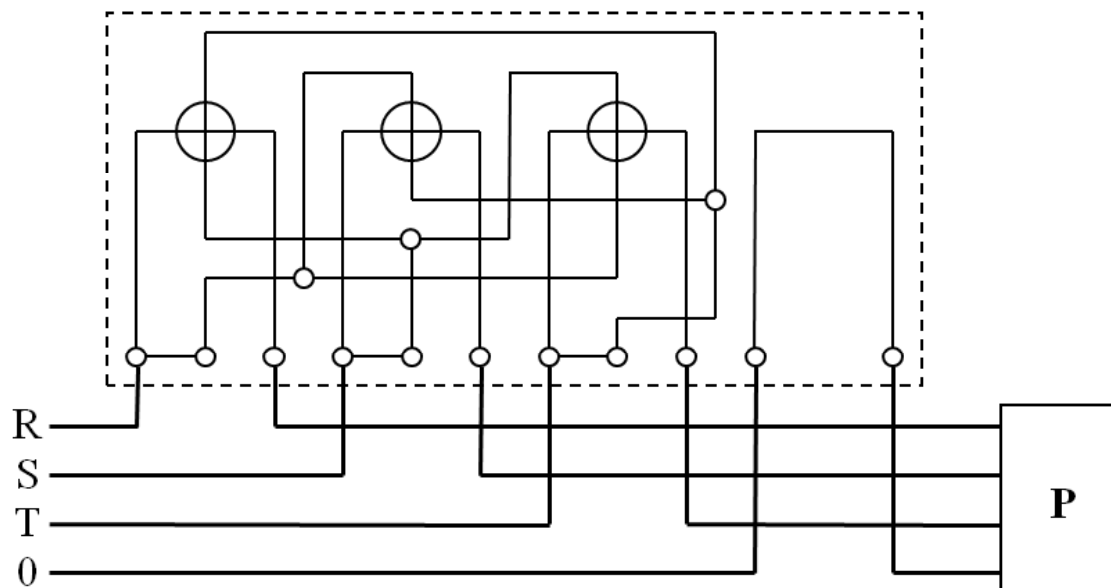
9.8.4.2. Šeme indukcionih brojila

- ❖ Na slici je data šema vezivanja **trofaznog dvosistemskog brojila za merenje aktivne energije**.
- ❖ Ova brojila služe za merenje aktivne energije u trožičnom sistemu.
- ❖ Ova šema odgovara Aronovoj vezi za merenje aktivnih snaga.



9.8.4.2. Šeme indukcionih brojila

- ❖ Na slici je prikazana šema vezivanja **trofaznog trosistemskog brojila za merenje reaktivne energije u četvrorožičnim sistemima**.
- ❖ Šema odgovara merenju reaktivne snage pomoću tri vatmetra.



9.8.4.2. Šeme indukcionih brojila

- ❖ Na slici je prikazana šema vezivanja **trofaznog dvosistemskeg brojila za merenje reaktivne energije u trorožičnim sistemima.**
- ❖ Šema odgovara Aronovoj vezi za merenje reaktivnih snaga.

